VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

EKONOMICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATICKÝCH METOD V EKONOMICE

Teorie her a její aplikace v oblasti společenských her

Game Theory and its Applications in the Realms of Social Games

Student: Pavlína Polanská

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Hančlová Jana, CSc.

Ostrava 2011

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci s názvem: „Teorie her a její aplikace v oblasti společenských her“ vypracoval(a) samostatně pod vedením doc. Ing. Hančlové Jany, CSc., s použitím literatury, uvedené na konci mé diplomové práce v seznamu použité literatury.

V Ostravě 11.05.2011 Pavlína Polanská

Obsah

1. Úvod

Teorie her je poměrně mladá oblast aplikované matematiky, která analyzuje velmi široké spektrum konfliktních situací. Tyto situace mohou nastávat téměř kdekoli, kde dochází ke střetu zájmů. Jak již napovídá samotný název, střet zájmů neboli konflikt je zde označován jako „hra“. Toto označení stejně jako spousta dalších pojmů teorie her pochází z terminologie, kterou užíváme, bavíme-li se o společenských hrách. Společenské hry, ať už karetní, deskové nebo jiné, byly vynalezeny výhradně za účelem relaxace, lidé se v nich utkávají proti sobě a každý z nich se snaží vyhrát – tím dochází vždy ke střetu zájmů. I přes nástup a zdokonalování informačních technologií a vývoj v oblasti počítačových her jsou tradiční společenské hry stále velmi oblíbené, v poslední době jejich popularita dokonce zaznamenala určitý nárůst. Vyvíjí se stále zcela nové, komplikovanější hry, případně se rozšiřují původní verze o nová pravidla. V této bakalářské práci se tedy pokusíme využít teorii her pro společenské hry.

Cílem této práce tedy bude na základě získaných teoretických znalostí z teorie her analyzovat vybranou společenskou hru a následně stanovit hledání optimálního chování hráčů za stanovených podmínek.

Nyní si nastíníme základní strukturu práce.

- V kapitole 2 vymezíme základní pojmy teorie her a teoretické členění konfliktů dle různých hledisek. Tyto konflikty si následně charakterizujeme.
- V kapitole 3 se pak budeme zaměřovat na metody řešení konfliktů popsaných v kapitole 2. Budeme se zde také zabývat možnostmi využití počítačových programů pro řešení úloh teorie her.
- Kapitola 4 bude zaměřena na aplikaci teorie her do vybrané oblasti – tedy do oblasti společenských her. Metodický postup bude aplikován na vybranou společenskou hru. Pro tyto účely byla vybrána karetní hra 6 bere. Hru budeme postupně analyzovat a vyhodnocovat optimální strategie. Jelikož, i přes svou primitivní podstatu, je námi využívaná karetní hra pro tyto analytické účely poměrně komplikovaná, v aplikační části této bakalářské práce upravíme dle našich potřeb její pravidla tak, aby vypracování příkladu odpovídalo znalostem a schopnostem na úrovni bakalářského studia a zároveň byl maximálně zachován prvotní princip hry.

2. Základy teorie her

Na počátku této kapitoly se budeme zabývat základními mezníky ve vývoji teorie her jako vědní disciplíny. V další části budou popsány základní důležité pojmy teorie her a následně rozčleněny typy konfliktů v teorii her, se kterými se můžeme setkat. Tyto konflikty budou poté podrobněji charakterizovány. Prioritně se budeme zaměřovat na konfliktní situace, které souvisí s praktickou částí této bakalářské práce. Jako hlavní zdroj pro vypracování této kapitoly byla použita publikace Dlouhý, Fiala (2007). Dále byly použity publikace Moravcová, Baňařová (2003), Maňas (1995) a Maňas (1983).

2.1 Vývoj teorie her jako vědní disciplíny

K vypracování této kapitoly byla použita část publikace Hykšová (2004).

Teorie her je část aplikované matematiky, která je využívána v oblasti společenských věd, nejčastěji v ekonomii, ale také v biologii, politologii, mezinárodních vztazích či oblasti informačních technologií a dalších oblastech.

Teorie her je sama o sobě velice mladá vědní disciplína, ovšem její kořeny sahají hluboko do historie. Lidé totiž již od pradávna museli čelit různým situacím a problémům, jejichž výsledek nezávisel pouze na jejich vlastním rozhodnutí, ale také souvisel s rozhodnutími, které učinily další inteligentní bytosti. I tenkrát musel člověk nějakým způsobem analyzovat jak svoje možnosti, tak i možnosti ostatních účastníků. Takovéto úvahy se staly základním pilířem dnešní teorie her.

Důležitou osobností ve vývoji „novodobé“ teorie her byl Émile Borel, francouzský matematik a politik. Svými články z let 1921 – 1927 významně přispěl k vývoji této vědní disciplíny.

Za skutečný mezník teorie her je považován článek *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* maďarského matematika Johna von Neumanna, publikován v roce 1928 v časopise *Mathematische Annalen*. John von Neumann je považován za zakladatele, resp. spoluzakladatele teorie her jako matematické disciplíny.

V roce 1944 vyšla rozsáhlá publikace *Theory of Games and Economic Behavior*[1]. Tato publikace byla výsledkem spolupráce Johna von Neumanna a ekonoma Oskara Morgensterna a je považována za základní dílo teorie her a ustanovila rovněž teorii her jako ekonomickou vědní disciplínu.

Na závěr je také velmi důležité zmínit jméno Johna Forbese Nashe (*1928), které je dnes neodlučitelně spjato s pojmem *rovnovážného bodu*. Tento pojem se stal záhy ústředním pojmem nekooperativních her.

2.2 Základní pojmy teorie her

Jak během normálního života, tak i v různých vědních a společenských disciplínách se setkáváme s velkým množstvím rozhodovacích situací. Základní formou rozhodovacích situací je situace, v níž se předpokládá, že rozhodnutí určitého subjektu nevyvolá žádnou reakci v okolí. Tato rozhodovací situace se nazývá situací nekonfliktní a vystupuje v ní tedy pouze jeden účastník. Pravděpodobnější ovšem je, že se daná situace bude týkat více než jednoho subjektu, tudíž budou jejich rozhodnutí vzájemně ovlivněna a provázána. Taková situace se nazývá konfliktní.

Studiem těchto konfliktních rozhodovacích situací se zabývá právě teorie her. Její název je úzce spjat s již dříve zmíněnou publikací *Theory of Game and Economic Behavior* [1] a taky s tím, že základní aparát je založen na zkoumání jednoduchých modelů konfliktních situací, jakými jsou například různé společenské hry. Toto se odrazilo rovněž v terminologii, která se odlišuje od terminologií běžně užívaných v ekonomii a dalších oborech.

Nyní je proto potřeba objasnit a interpretovat tyto základní pojmy: hra, množina hráčů, množina prostorů strategií, optimální strategie, množina výplatních funkcí.

Hrou se myslí rozhodovací situace konfliktního typu, v níž vystupuje více účastníků. Základní hra je charakterizována třemi prvky: množinou hráčů, množinou prostorů strategií a množinou výplatních funkcí.

Množina hráčů vyjadřuje množinu všech účastníků konfliktu. Hráč je tedy účastník konfliktu neboli rozhodovatel. Tím může být firma či politická strana. V našem konkrétním případě je to hráč karetní hry a množina hráčů jsou tedy dva účastníci karetní hry, vystupující proti sobě.

Množina prostorů strategií vyjadřuje soubor všech strategií každého hráče. Strategií se myslí konkrétní alternativa, kterou může účastník zvolit a každý z účastníků hry má několik těchto alternativ. Účastníci mohou mít stejné i rozdílné možnosti strategií.

Cílem je obvykle najít tzv. **optimální strategii**, což je strategie, která je pro hráče nejvýhodnější. Jinými slovy, pokud se hráč odchýlí od své optimální strategie, nikdy mu to nemůže přinést větší zisk.

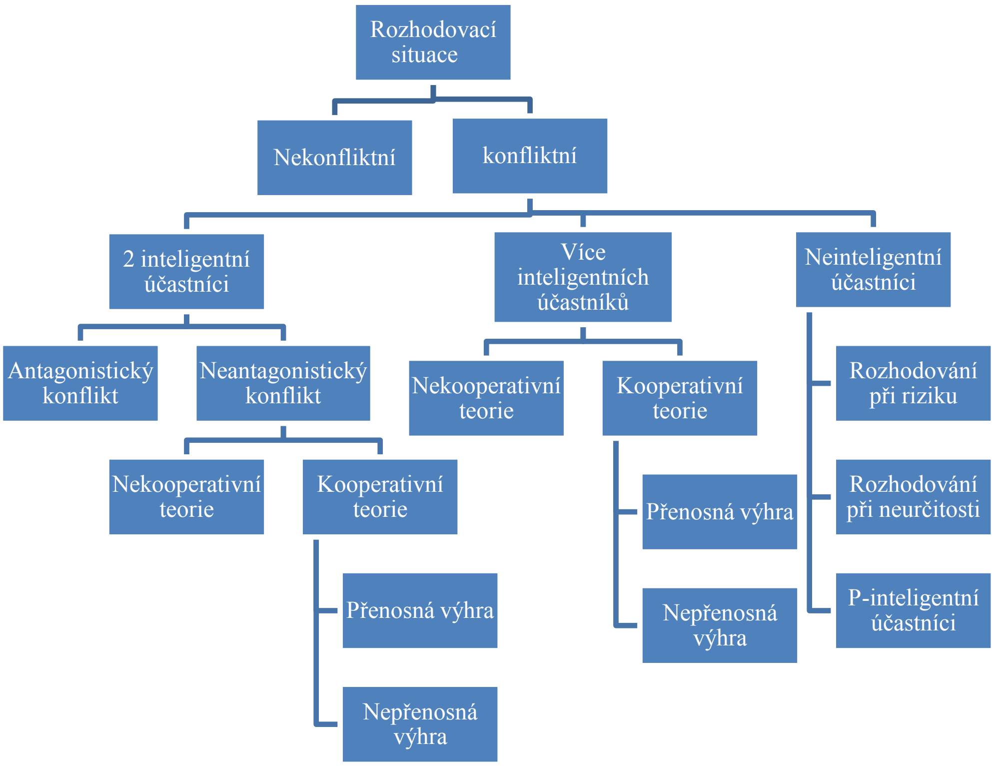
Množina výplatních funkcí všech hráčů vyjadřuje soubor výplatních funkcí jednotlivých hráčů. Výplatní funkce zde vyjadřuje výsledek hry, resp. výhru či zisk, kterou může hráč získat při volbě jednotlivých strategií.

2.3 Typy konfliktů v teorii her

V této kapitole budou popsány možné typy konfliktů, které mohou nastat v teorii her. Tyto typy budou také doplněny o případný jednoduchý praktický příklad. Jelikož se aplikační část této práce bude zabývat především konečným konfliktem dvou účastníků, bude pozornost věnována především těmto typům konfliktů, a konfliktům o více účastnících se věnovat příliš nebudeme.

Jako ukázku možného členění jednotlivých konfliktů použijeme následující schéma.

Obrázek 2.1. Členění konfliktů v teorii her.



Zdroj: Maňas (1974, strana 15).

Ze schématu na obrázku 2.1 lze vypozorovat, že konfliktní situace můžeme členit dle různých hledisek, např.:

Dle počtu účastníků na:

1. konflikt dvou účastníků,
2. konflikt více účastníků.

Dle samotné povahy účastníků na:

1. konflikt inteligentních účastníků – účastníci konfliktu se racionálně rozhodují,
2. konflikt neinteligentních účastníků – účastníci konfliktu se rozhodují např. dle určitého pravděpodobnostního rozdělení.

Dle vyhraněnosti vztahů v konfliktu na:

1. antagonistický konflikt – účastníci sledují právě protikladné zájmy, zisk jednoho je ztráta druhého, nelze tedy ani spolupracovat,
2. neantagonistický konflikt – účastníci sledují především své vlastní zájmy bez ohledu na ostatní hráče.

U neantagonistického konfliktu můžeme dále rozlišit teorii:

1. kooperativní – tzn. hráči mohou vzájemně spolupracovat,
2. nekooperativní – hráči vzájemně nespolupracují.

V případě kooperativní teorie můžeme ještě výhru členit na:

1. přenosnou – spoluhráči se mohou o výhru dělit,
2. nepřenosnou – o výhru se podělit nelze.

Toto schéma není bohužel nijak podrobné. Je samozřejmě možné rozdělit i konflikt více účastníků na antagonistický a neantagonistický. Dále také můžeme hry rozlišovat jako **opakované**, kdy se hra několikrát za sebou opakuje za určitých specifikovaných podmínek, podle počtu rozhodnutí, ze kterých vybíráme, na konečné a nekonečné, případně na hru v normálním či rozvinutém tvaru. H**rou v rozvinutém tvaru** se myslí tzv. *tahová hra*, při které se hráči ve výběru jednotlivých strategií střídají (např. šachy).

Pro tuto bakalářskou práci bude podstatná především větev dvou inteligentních účastníků.

2.3.1 Hry s konstantním součtem neboli antagonistické konflikty

Základním modelem teorie her je tzv. hra v normálním tvaru. Tato hra je charakterizována třemi množinami:

1. První množinou je množina hráčů (všech účastníků situace) $I = \{1, 2, 3, \dots, N\}$.
2. Druhou množinou je množina prostorů strategií $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ pro jednotlivé hráče.
3. Třetí množinou je množina výplatních funkcí všech hráčů – $\{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$.

Jak již bylo dříve zmíněno, v této práci se budeme zabývat především konflikty dvou účastníků. V dalším textu bude tedy pro zjednodušení uváděno označení dvou hráčů 1 a 2. Prostor strategií bude pro zjednodušení a větší přehlednost uváděn pro hráče 1 jako X a pro hráče 2 jako Y.

Výplatní funkce jsou definovány na kartézském součinu (tzn. výplatní funkce musí stanovit výhru hráče pro všechny možné kombinace strategií). Tyto výplatní funkce budou označovány v případě hráče 1 jako $f_1(x, y)$ a pro hráče 2 jako $f_2(x, y)$.

V případě antagonistického konfliktu budeme předpokládat, že hráči jsou oba inteligentní, tzn., že jsou schopni zcela racionálně zhodnotit situaci a snaží se maximalizovat svou výhru. Dále také budeme předpokládat, že hráči mají dokonalé informace – znají všechny tři uvedené množiny (množinu hráčů, množinu strategií i výplatních funkcí).

Antagonistický konflikt je tedy takový konflikt, kdy výhra jednoho hráče je prohrou hráče druhého. V těchto situacích je tedy zcela bezpředmětné jakkoli spolupracovat. V případě hry dvou hráčů 1 a 2 a v případě prostoru strategií X a Y tedy platí vztah:

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = K\ .$$

K je libovolné reálné číslo, f_1 a f_2 označují výplatní funkce hráčů.

Pro libovolné K je možné hru s konstantním součtem transformovat na hru s nulovým součtem $K=0$. Přičtením libovolné konstanty ke všem hodnotám výplatní funkce totiž nedojde ke změně řešení. Platilo by poté, že:

$$f_1(x, y) = -f_2(x, y).$$

Typickým antagonistickým konfliktem je tedy jednoduchá jednorázová rozhodovací situace, kdy hráči znají své i protivníkovy možnosti i výplaty a musí se společně v jeden okamžik rozhodnout bez ohledu na to, zda znají rozhodnutí protivníka.

2.3.2 Hry s nekonstantním součtem neboli neantagonistické konflikty

V praxi se vyskytují situace, kdy účastníci sice sledují především své vlastní zájmy, ty ovšem nemusí nutně být v přesném protikladu se zájmy ostatních účastníků. Neplatí tedy to, že co jeden hráč získává, druhý ztrácí. Tyto konflikty se nazývají neantagonistické a můžeme je dále rozlišit na **kooperativní** (hráči spolu mohou spolupracovat) a **nekooperativní** (hráči spolupracovat nemohou). Toto členění můžeme pozorovat na obrázku 2.1.

Nekooperativní hra

V případě nekooperativní hry spolu účastníci konfliktu nespolupracují a každý jednají ve svém vlastním nejlepším zájmu, přičemž zisk jednoho nemusí nutně znamenat ztrátu druhého hráče. Výhry v tomto případě samozřejmě nelze přerozdělovat.

Matematickým modelem těchto neantagonistických konfliktů je tzv. dvoumaticová hra. Tato hra je určena dvěma maticemi, z nichž každá reprezentuje výplatní funkci jednoho hráče.

Při výběru i-té strategie jednoho hráče a j-té strategie druhého hráče je hodnota výplatní funkce a_{ij} (v případě prvního hráče) a b_{ij} (v případě druhého hráče).

Mezi hodnotami výher hráčů není přímý vztah (na rozdíl od her s konstantním součtem).

Kooperativní hra

Pokud mají hráči možnost uzavírat mezi sebou závazné smlouvy o tom, jaké strategie v budoucnu zvolí, potom mluvíme o kooperativní teorii. V této hře je spojenectví možné, nikoli však nutné. Hráči budou spolupracovat jen tehdy, pokud to pro oba bude výhodné, tj. spolupráce poskytne oběma hráčům větší výhru, než jakou by získali bez ní.

Spolupracovat samozřejmě nemusí pouze dva hráči, ale i větší skupina hráčů. Existuje tedy rovněž kooperativní hra N hráčů.

Při větším počtu hráčů se nastoluje otázka tvorby koalic. *Koalice* je skupina hráčů, kteří spolupracují při volbě strategií. Pokud skupinu hráčů nazveme N, koalicí je pak každá skupina S, která je podmnožinou skupiny N. V případě, že S=N, hovoříme o tzv. velké koalici, ve které figurují všichni hráči, kteří se dané hry účastní.

Kooperativní hra se dále dá rozdělit dle výhry na přenosnou a nepřenosnou.

Přenosná výhra – Je taková, kdy se hráč o svou výhru podělí se spolupracujícími hráči.

Nepřenosná výhra – V takovém případě se z různých důvodů o výhru podělit nelze.

Více se kooperativní hrou nebudeme zabývat, protože pro tuto práci není příliš podstatná. Hra, která zde bude uvedena jako modelový příklad v aplikační části této práce, vylučuje jakékoli kooperativní techniky, jelikož jejím cílem je protihráče porazit.

2.3.3 Hry v rozvinutém tvaru

Ve hře v normálním tvaru jsme předpokládali, že strategie jsou hráči realizovány v jednom časovém okamžiku. Určité konfliktní situace jsou však realizovány prostřednictvím střídavých tahů jednotlivých hráčů. Do této řady konfliktů patří i různé salónní hry typu šachů, dámy apod., pro něž je typické střídání tahů mezi např. bílými a černými figurkami.

Pro modelování konfliktů, jež jsou charakterizovány řadou po sobě jdoucích tahů (rozhodnutí) používáme hry v rozvinutém tvaru, které jsou též známy pod názvem *hry v explicitním tvaru* či *tahové hry*. Hru v rozvinutém tvaru znázorníme pomocí grafu, tzv. *stromu hry*. Grafem je množina uzlů a hran, strom je graf, který je souvislý, má jeden počáteční uzel, tzv. kořen a zpravidla několik koncových uzlů, které reprezentují konec hry. Hráči se střídají a určují průběh hry v rozhodovacích uzlech (kořen je též rozhodovací uzel).

2.3.4 Opakované hry

Až doposud se předpokládalo, že hráči hrají určitou hru pouze jednou. V reálném světě se však některé hry neustále opakují, jako například v ekonomice, ve které se neustále firmy střetávají na trhu, znovu a znovu stanovují ceny atd. Hru v normálním tvaru, která je hráči opakovaně hrána nazveme **opakovanou hrou**.

Mějme hru *G* v normálním tvaru s *N* hráči. Hra *G* je jednorázová hra, probíhá tedy pouze jednou. Každý hráč má neprázdný konečný prostor možností, resp. tzv. akcí. Termínem strategie se zde potom myslí posloupnost jednotlivých akcí v rámci celé opakované hry. Jestliže je tedy hra *G* hrána opakovaně, pak řada jednokolových her *G* je sama o sobě také hrou, tzv. opakovanou hrou. Opakovanou hru můžeme dále rozdělit na *konečně* a *nekonečně opakovanou hru*.

Obecně v opakované hře vycházíme z následujících předpokladů:

1. Každý hráč má v jednotlivých kolech hry stejný prostor strategií.
2. Výplaty pro hráče závisí pouze na profilu akcí daného kola bez ohledu na to, které kolo se hraje.
3. Hráči se rozhodují a uskutečňují své akce pro dané kolo současně (jde o hru v normálním tvaru).
4. Každý hráč zná akce, které uskutečnili ostatní hráči v předchozím kole.

Z prvních dvou předpokladů vyplývá, že prostředí pro opakovanou hru je stacionární, jinak řečeno, výplatní matice je v každém kole stejná. Z dalších dvou předpokladů vyplývá, že v jednotlivých kolech je volba konkrétní akce hráčem podmíněna minulými rozhodnutími ostatních hráčů.

2.3.5 Rozhodování při riziku a neurčitosti

Rozhodování při jistotě znamená, že rozhodnutím je jednoznačně dán výsledek.

Rozhodováním při nejistotě rozumíme situace, kdy rozhodnutí nemá jednoznačný výsledek, ten ještě závisí na daném stavu okolí.

Rozhodováním při riziku rozumíme takové rozhodovací situace, ve kterých výsledek volby určité varianty rozhodnutí není dán s jistotou, nýbrž známým rozložením pravděpodobností. Příkladem může být sázka na to, že při hodu kostkou padne číslo 6. Výsledek hodu kostkou sice není předem znám, ale předem víme, že pravděpodobnost úspěchu je 1/6.

Jelikož předpokládáme existenci pouze jediného hráče, může se zdát, že úlohy daného typu by měly být řazeny spíše do teorie pravděpodobnosti, teorie rozhodování či teorie operačního výzkumu, než do teorie her. Jde však pouze o nevelkou změnu pohledu, ve kterém budeme chápat rozhodování při riziku jako konfliktní situaci mezi inteligentním hráčem 1 a neinteligentním hráčem 2, který je náhodným mechanismem. Přitom předpokládáme, že hráč 2 volí své strategie podle známého rozdělení a nesleduje žádný vlastní cíl.

Rozhodováním při neurčitosti nazýváme situaci, v niž známe možné strategie hráče 2 (náhodného mechanismu), na rozdíl od rozhodování při riziku však nemáme žádnou informaci o rozložení pravděpodobnosti. V situacích, kdy máme velmi omezenou informaci o povaze protihráče, není možné stanovit jednoznačný postup výběru optimálního rozhodnutí. Nicméně lze doporučit určitá pravidla, která by optimální rozhodnutí mělo splňovat.

2.3.6 P-inteligentní účastníci

Ve skutečných rozhodovacích situacích často zjišťujeme, že chování reálných inteligentních subjektů je poněkud odlišnější a že reálný inteligentní subjekt se z mnoha důvodů nemusí chovat jako normativně inteligentní hráč. Může se stát, že k rozboru konfliktní situace použije odlišného modelu, než očekává hráč provádějící rozbor z pozice prvního hráče. Zejména může často dojít k rozdílnému hodnocení důsledků konfliktu. Jindy nepoužívá protihráč odpovídající strategie proto, že nezná příslušné teoretické výsledky nebo nemá technickou možnost vypočítat svoji optimální strategii. Takový účastník ovšem zároveň nemá povahu náhodného mechanismu, neboť v rámci možností mu záleží na výši jeho výhry. *P*-inteligentní hráč je tedy takový, který se s pravděpodobností p chová jako inteligentní a s pravděpodobností *1-p* jako neinteligentní.

3. Vybrané metody řešení problémů v oblasti teorie her

V této kapitole budou ukázány způsoby řešení konfliktů popsaných v kapitole 2. Vzhledem k zaměření praktické části bakalářské práce se zde budeme zabývat pouze konflikty, v nichž vystupují dva účastníci. Metody řešení budou demonstrovány na jednoduchých praktických příkladech. Dále také budeme věnovat pozornost řešení úloh pomocí počítačových programů. Jako hlavní zdroj pro vypracování této kapitoly byla použita publikace Dlouhý, Fiala (2006). Dalšími zdroji byly publikace Maňas (1974), Moravcová, Baňařová (2003), Maňas (1995).

3.1 Metody řešení konfliktů dvou hráčů

V této kapitole si rozdělíme jednotlivé typy konfliktních situací podle toho, jak jsou uvedeny v kapitole 2. Následně se budeme zabývat postupem jejich řešení.

3.1.1 Antagonistický konflikt

Antagonistický konflikt je obvykle zapsán pomocí jedné matice, jelikož výhra jednoho hráče vyjadřuje prohru hráče druhého. Řešení antagonistických konfliktů můžeme dále rozdělit na dvě metody, kterými jsou řešení v ryzích strategiích a řešení ve strategiích smíšených. Ke smíšeným strategiím přistupujeme v případě, že řešení v ryzích strategiích není možné nalézt.

Antagonistický konflikt v ryzích strategiích

Antagonistický konflikt a jeho řešení v ryzích strategiích by se dal považovat za nejjednodušší konflikt dvou účastníků.

Optimální strategii prvního hráče označíme $x^o \in X$. K této strategii existuje optimální strategie druhého hráče $y^o \in Y$. Pro výplatní funkce platí:

$$f_1(x, y^o) \leq f_1(x^o, y^o) \text{ a } f_2(x^o, y) \leq f_1(x^o, y^o), \text{ kde}$$

f_1 a f_2 jsou výplatní funkce hráčů a x^o, y^o jsou jejich optimální strategie.

Z těchto vztahů vyplývá, že pokud se některý z hráčů nebude držet optimální strategie, zatímco druhý ano, jeho výhra se sníží, v nejlepším možném případě zůstane stejná. Ten, kdo se odchýlí od optimální strategie, si tedy nemůže polepšit. Takto definované optimální strategie představují tzv. Nashovu rovnováhu a nazýváme je *rovnovážnými strategiemi.*

Jelikož se jedná o konečný prostor strategií, můžeme hru s nulovým součtem znázornit maticí $A = (a_{ij})$. Výběr i-tého řádku matice odpovídá výběru i-té strategie hráče 1, výběr j-tého sloupce matice odpovídá výběru j-té strategie hráče 2. Při výběru této dvojice strategií je hodnota výplatní funkce hráče 1 rovna a_{ij} a hodnota výplatní funkce hráče 2 je rovna $-a_{ij}$. Toto se nazývá maticová hra a matici A označujeme jako *výplatní matici.*

Nashovu rovnováhu můžeme získat nalezením sedlového prvku matice. Sedlový prvek je určen v matici A hodnotou, která je největší ve svém sloupci a zároveň nejmenší ve svém řádku. Tento postup je dán tím, že oba hráči jsou inteligentní a tudíž každý z hráčů předpokládá racionální chování svého spoluhráče. Jelikož při antagonistickém konfliktu jsou výhry v matici uvedeny vždy vzhledem k prvnímu hráči (strategie v řádcích), hráč 1 bude předpokládat vždy nejhorší možný výsledek (minimum v řádku). Naopak hráč 2 získá nejhorší možné výsledky svých voleb tím, že vyhledá maxima v jednotlivých sloupcích, jelikož čím více hráč 1 vyhraje, tím větší prohra je to pro hráče 2. Pokud tedy nalezneme sedlový prvek, je strategie i optimální strategií hráče 1 a strategie j je optimální strategií hráče 2. Hra má tedy řešení v ryzích strategiích.

Při řešení konfliktní situace v ryzích strategiích můžeme nalézt jeden nebo více sedlových bodů. V případě nalezení více sedlových bodů jsou všechny odpovídající strategie těmi optimálními.

Nyní uvedeme na příkladech 3.1 a 3.2, viz Dlouhý, Fiala (2007), jak by dané situace mohly vypadat. Pro větší přehlednost označíme kulatými závorkami všechna sloupcová maxima a hranatými závorkami všechna řádková minima.

Příklad 3.1

V tomto příkladě bylo nalezeno právě jedno optimální řešení v ryzích strategiích.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & [(4)] & 5 \\ [-2] & 5 & 3 & (7) \\ (8) & (7) & [-2] & 6 \end{vmatrix}$$

Minimum v jednotlivých řádcích je |4|-2|-2|, maximum v jednotlivých sloupcích je |8|7|4|7|. Sedlovým prvkem je v tomto případě jednoznačně prvek $a_{13} = 4$. Z toho vyplývá, že pro hráče 1 je optimální strategií strategie 1 (první řádek) a pro hráče 2 je to strategie č. 3 (třetí sloupec).

Příklad 3.2

V tomto příkladě bylo nalezeno více optimálních řešení v ryzích strategiích.

$$\begin{vmatrix} [(0)] & 1 & 3 & [(0)] \\ [(0)] & 2 & (4) & [(0)] \\ [-4] & (5) & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Minimální hodnoty v řádcích jsou |0|0|-4|, maxima ve sloupcích jsou |0|5|4|0|. Na matici lze vidět, že hra má 4 sedlové prvky, což znamená, že má i čtyři optimální řešení. Ať se tedy hráči rozhodnou pro kterékoli z těchto řešení, nic se pro ně ve výsledku nezmění, tedy nezhorší ani nezlepší.

Pokud se nepodaří nalézt řešení pomocí metody sedlového bodu, neznamená to, že by hra řešení neměla, ale že pouze nemůžeme její řešení nalézt v ryzích strategiích a je nutné přistoupit k řešení ve strategiích smíšených.

Antagonistický konflikt ve smíšených strategiích

Prostory strategií nyní budou představovat vektory pravděpodobnosti, s jakou hráči zvolí jednotlivé strategie. Prostory strategií hráčů jsou nyní v této podobě:

$$X = \{x;\ x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m],\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x \geq 0\}$$

$$Y = \{y;\ y^T = [y_1, y_2, \dots, y_n]\ ,\ \sum_{j=1}^{n} y_i = 1, y \geq 0\}\ .$$

Hodnota výplatní funkce udává očekávanou střední hodnotu výhry. V případě her s konstantním součtem stačí sledovat výplatní funkci prvního hráče, která má tvar:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

Smysl smíšených strategií se dá jednoduše ukázat na pravděpodobně všem známé hře „Kámen, nůžky, papír".

Každý z hráčů má k dispozici tři možné strategie. Podle pravidel hry kámen rozbije nůžky, nůžky stříhají papír a papír balí kámen. V případě že oba hráči zvolí stejné možnosti, nastane remíza.

Tuto jednoduchou hru můžeme tedy charakterizovat maticí příkladu 3.3. V této matici jsou strategie vyjádřeny v pořadí Kámen – Nůžky – Papír jak ve sloupci, tak i v řádku.

Příklad 3.3

$$\begin{vmatrix} 0 & (1) & [-1] \\ [-1] & 0 & (1) \\ (1) & [-1] & 0 \end{vmatrix}$$

Jako v předchozích příkladech jsou označeny všechna sloupcová maxima kulatými závorkami a všechna řádková minima závorkami hranatými. Jak je vidět, v každém sloupci i řádku se nacházejí stejné číslice, minimum bude tedy vždy -1 a maximum vždy 1. Žádný sedlový bod tedy neexistuje.

Prvním krokem při postupu řešení ve smíšených strategiích je ověřit, zda ve výplatní matici *A* existují pouze kladné prvky. Pokud tomu tak není, přičteme ke všem prvkům matice libovolnou konstantu *c* tak, aby všechny kladné byly. Touto úpravou se hra nijak nezmění, pouze umožní další řešení. Původní i nová hra jsou tedy strategicky ekvivalentní. Cena nové hry bude $(v + c)$.

Pokud bychom tedy pokračovali ve hře „kámen, nůžky, papír“, přičetli bychom k matici 3.3 ideálně konstantu 2. Matice 3.3 po úpravě bude vypadat takto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Následující řešení bude realizováno pomocí **simplexové metody**. Tato metoda bude blíže popsána v kapitole 3.2.

3.1.2 Neantagonistický konflikt

Nekooperativní teorie

Jak již bylo v předchozí kapitole zmíněno, v případě nekooperativní teorie se hra vyjadřuje prostřednictvím dvou matic, z nichž jedna vyjadřuje výplatní funkci prvního hráče a druhá výplatní funkci druhého hráče.

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} \end{vmatrix}$$

Nekooperativní teorie v ryzích strategiích

U nekooperativní teorie využijeme modifikované Nashovo rovnovážné řešení, jako u her s konstantním součtem.

Dvojici strategií x^o a y^o nazveme Nashovými rovnovážnými strategiemi, jestliže:

$$f_1(x, y^o) \leq f_1(x^o, y^o)$$

$$f_2(x^o, y) \leq f_2(x^o, y^o)$$

Rovnovážné řešení v ryzích strategiích nalezneme tak, že označíme v matici A všechna sloupcová maxima a v matici B všechna řádková maxima. Pokud je určitá dvoumatice prvků označena oběma hráči, jde o rovnovážné řešení.

V případě dvoumaticových her a jejich rovnovážných řešení v ryzích strategiích mohou nastat tyto případy:

1. Existuje pouze jedno Nashovo rovnovážné řešení. V tom případě dává jednoznačný návod k optimálnímu jednání obou hráčů.
2. Rovnovážných řešení je více, jedno z nich je však pro oba hráče výhodnější než ostatní, v tom případě hráči volí toto řešení.
3. Rovnovážných řešení je více, může ovšem nastat problém, že se hráči neshodnou, které řešení zvolí, jelikož každý z nich preferuje jiné.
4. Hra nemá rovnovážné řešení v ryzích strategiích.

Tyto případy jsou dále zobrazeny v příkladech 3.4, 3.5, 3.6 a 3.7, viz Dlouhý, Fiala (2007).

Příklad 3.4

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Můžeme přepsat obě matice do jedné a označit v ní sloupcová maxima kulatými závorkami a řádková maxima závorkami hranatými.

$$\begin{vmatrix} (3),[5] & (4),2 \\ -2,[7] & 2,1 \end{vmatrix}$$

Řádková maxima jsou 5 a 7, sloupcová maxima jsou 3 a 4. Tím byla označena dvojice prvků (3,5) a ty představují optimální řešení.

Příklad 3.5

$$A=\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Opět přepíšeme do jedné matice a označíme jako v předchozím příkladě.

$$\begin{vmatrix} (7),[9] & -2,1 \\ -2,0 & (6),[4] \end{vmatrix}$$

Na matici je viditelné, že v tomto případě jsou rovnovážná řešení dvě. Řešení na pozici a_{11} (7,9) je ale pro oba hráče výhodnější než řešení (6,4), hráči tedy v tomto případě jednoznačně zvolí první řešení.

Příklad 3.6

$$A=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Opět přepíšeme a označíme.

$$\begin{vmatrix} (3),[9] & -2,1 \\ -2,0 & (6),[4] \end{vmatrix}$$

V této matici vidíme rovněž dvě rovnovážná řešení. Je tady ale problém, jelikož pro hráče 2 je výhodnější strategie a_{11} (3,9) a pro hráče 1 je výhodnější strategie a_{22} (6,4). Pokud tedy hráč 1 zvolí strategii ve druhém řádku a hráč 2 zvolí strategii v prvním řádku, výsledná kombinace bude a_{21} a výplaty tedy budou (-2,0).

Příklad 3.7

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Po přepsání a označení maxim:

$$\begin{vmatrix} 3,[5] & (2),-1 \\ (4),1 & -2,[5] \end{vmatrix}$$

Tato hra nemá žádné rovnovážné řešení.

Jestliže jsme nenalezli žádné rovnovážné řešení v ryzích strategiích, můžeme přistoupit k využití smíšeného rozšíření maticové hry, kde každá dvoumaticová hra má alespoň jedno rovnovážné řešení.

Nekooperativní teorie ve smíšeném rozšíření

Prostory strategií jsou:

$$X = \{x;\ x^T = [x_1, x_2, \ldots, x_m],\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x \geq 0\}$$

$$Y = \{y;\ y^T = [y_1, y_2, \ldots, y_n],\ \sum_{j=1}^{n} y_i = 1, y \geq 0\}.$$

Výplatní funkce hráčů mají tvar:

$$f_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

$$f_2(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = x^T B y.$$

Hledání rovnovážných strategií v případě smíšeného rozšíření dvoumaticových her je možné formulovat jako úlohu nelineárního programování.

Kooperativní teorie

Kooperativní teorie zahrnuje konfliktní situace, ve kterých spolu hráči mohou spolupracovat, aby jejich výhra byla co největší, ať už je přenosná či nepřenosná (viz 2.3.2).

Vzhledem k tomu, že v praktické části této práce bude rozebírána hra, ve které jakákoli spolupráce postrádá smysl, nebudeme se zde již tímto typem konfliktu zabývat.

Postup řešení v případě kooperativní teorie uvádí Maňas (1974).

3.1.3 Hry v rozvinutém tvaru

Jak již bylo v kapitole 2.3.3 vysvětleno, hry v rozvinutém tvaru jsou takové hry, kde se hráči v jednotlivých tazích střídají, tzn. volba strategie neprobíhá pro oba hráče najednou. Průběh hry se pak zobrazuje pomocí tzv. stromu hry. Pojetí časového rozložení rozhodování hráčů velmi ovlivňuje volbu strategií i výslednou hodnotu výhry. Postup řešení bude opět nejjednodušší popsat na praktickém příkladě. Zadání příkladu bylo převzato z publikace Dlouhý, Fiala (2007).

Příklad 3.8

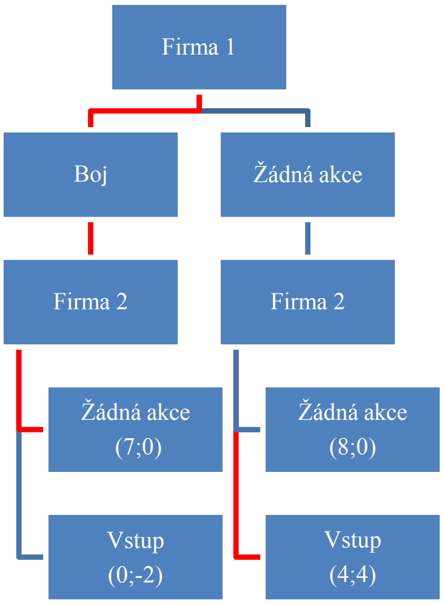
Uvažujme dvě firmy, které označíme jako firma 1 a firma 2. Firma 1 již operuje na určitém trhu a firma 2 se rozhoduje, zda vstoupit či nevstoupit na daný trh. Firma 1 může bojovat proti vstupu firmy 2, nebo může zůstat nečinná. Tabulka výplat vypadá takto:

	Firma 2 – žádná akce	Firma 2 – vstup
Firma 1 – boj	7;0	0;-2
Firma 1 – žádná akce	8;0	4;4

Při hře v rozvinutém tvaru mohou nastat tyto možnosti:

a) Pokud se firma 1 má právo rozhodnout jako první, strom hry bude vypadat takto:

Obrázek 3.1. Strom hry v případě varianty a).

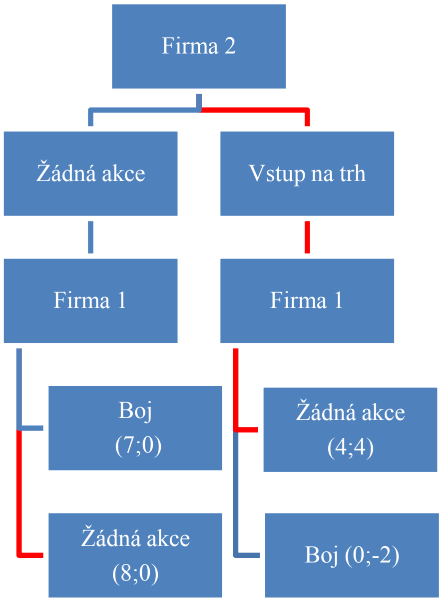


Zdroj: Dlouhý, Fiala (2007, strana 46)

Tato hra se řeší metodou zpětné indukce. Začínáme tedy od konce firmou 2. Firma 2 se může dostat díky rozhodnutí firmy 1 do dvou situací, v nichž bude jednat tak, aby z toho měla co největší užitek. Jelikož v první situaci je varianta žádné akce oceněna pro firmu 2 výplatou 0 a pokus o vstup je ohodnocen výplatou -2, firma 2 bude jednoznačně volit variantu žádné akce. V druhém případě by žádná akce znamenala pro firmu 2 výplatu 0 a vstup na trh výplatu 4, je tedy jasné, že firma 2 zvolí vstoupit na trh. Postoupíme o tah výš, kde se rozhoduje firma 1. V takovém případě pokud firma 1 zvolí boj, bude její výplata 7, protože optimální strategie firmy 2 je neprovést žádnou akci. Pokud se firma 1 rozhodne pro možnost žádné akce, bude její výplata 4. Optimální cesta je na schématu vyznačena červenou barvou.

b) V případě, že první rozhodnutí bude mít právo učinit firma 2, bude strom hry vypadat takto:

Obrázek 3. 2. Strom hry v případě varianty b).



Zdroj: Dlouhý, Fiala (2007, strana 47).

Postup při řešení je opět stejný jako ve variantě a). Rozdíl je ovšem v konečné strategii a odpovídající výplatě. Výsledná strategie vede k výplatě (4;4), kdežto u varianty a) byla výsledkem výplata (7;0).

3.1.4 Opakované hry

Jak již bylo řečeno, v případě opakovaných her mají v každém kole hráči stejný prostor akcí i stejné výplatní funkce. Výplata tedy závisí pouze na profilu daných akcí, ovšem bez ohledu na to, jaké kolo hry se hraje.

U opakovaných her platí: Nechť $a_i^t \in A_i$ je akce, kterou v období t zvolí hráč i, potom vektor $a^t = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ je profil akcí, které jsou hrány v období t, neboli K-tice individuálních akcí jednotlivých hráčů v jednorázové hře G.

Z předpokladů uvedených v 2.3.4 vyplývá, že volba konkrétních akcí v jednotlivých kolech je podmíněna minulými rozhodnutími druhého hráče.

Tuto podmíněnost volby akcí minulým chováním vyjádříme pomocí tzv. historie, která představuje všechny předchozí realizované profily akcí.

Historie v období t je dána:

$$h^t = (a^0, a^1, \dots, a^{t-1}), pro\ t = 1,2 \dots T.$$

Hra začíná v okamžiku 0, historie po 3. kole (a^2) hry je tedy h^3.

Příkladem takovéto historie může být v rámci již dříve zmíněné hry „kámen, nůžky, papír“ po třetím kole např. $h^3 = ((kámen, nůžky), (papír, papír), (kámen, papír))$

Dále definujeme prostor historií H^t, což je množina všech možných historií h^t v opakované hře. Prostor historií v období *t* je dán jako kartézský součin prostorů profilů akcí *A* jednotlivých kol opakované hry:

$$H^t = A^0 \times A^1 \times \dots \times A^t.$$

Hráči zvolí strategii v kole *t* až po vyhodnocení odehrané hry v čase *t-1*. Profil strategií odehraných v čase *t* je dán vektorem:

$$s^t = (s_1(h^t), s_2(h^t), \dots, s_n(h^t)).$$

Strategii hráče *i* v opakované hře vyjádříme jako:

$$s_i = (s_i(h^1), s_i(h^2), \dots, s_i(h^T)).$$

Chování hráčů během opakované hry probíhá tedy asi takto: na počátku hry v nultém období neexistuje žádná historie (přesněji historie h^0 existuje, ale je prázdná a tudíž nemá žádnou hodnotu). Každý hráč volí svou akci pro nulté kolo a_i^0. Po uskutečnění nultého kola se vytvoří historie $h^1 = (a^0)$. Všichni hráči jsou obeznámeni s touto historií a volí své chování pro první kolo $s_i(h^1)$. Po odehrání prvního kola je historie aktualizována, tj. sloučíme profil akcí prvního kola a historii platnou pro první kolo, vznikne historie h^2. Tato historie je sdělena všem hráčům, aby mohli zvolit své strategie pro druhé kolo. Ve stejném duchu je hra realizována v dalších kolech.

Pro stanovení výplatní funkce u_i v opakované hře vezmeme v úvahu přístup založený na diskontování s diskontním faktorem δ_i ležícím v intervalu (0,1). Diskontní faktor δ_i je definován jako společný pro všechny výplaty z jednotlivých kol. Diskontováním zavádíme do výplatní funkce hodnotu času. Diskontní faktor slouží jako míra netrpělivosti hráčů. Hodnoty blízké nule značí netrpělivého hráče a naopak hodnoty blížící se jedné značí, že hráč je trpělivý a budoucí výplaty jsou pro něj významné.

Hráčova výplatní funkce je nejčastěji definována jako diskontovaný součet výplat každého kola hry:

$$u_i = g_i(a^0) + \delta_i g_i(a^1) + \delta^2{}_i g_i(a^2) + \cdots = \sum_{t=0}^{T} \delta^2{}_i g_i(a^t).$$

$g_i(a^t)$ jsou výplaty hráče z jednotlivých kol a T je konečné číslo nebo nekonečno.

3.2 Simplexová metoda

K vypracování této kapitoly byla použita publikace Jablonský (2002).

Jak již bylo popsáno v kapitole 3.1.1 o antagonistických konfliktech, ne všechny maticové hry mají řešení v ryzích strategiích, ovšem každá maticová hra má řešení ve smíšených strategiích. Rozdíl je jen v tom, že řešení ve smíšených strategiích je dáno pravděpodobnostmi, se kterými budou hráči volit své jednotlivé strategie. K nalezení řešení maticové hry ve smíšených strategiích se využívá simplexové metody.

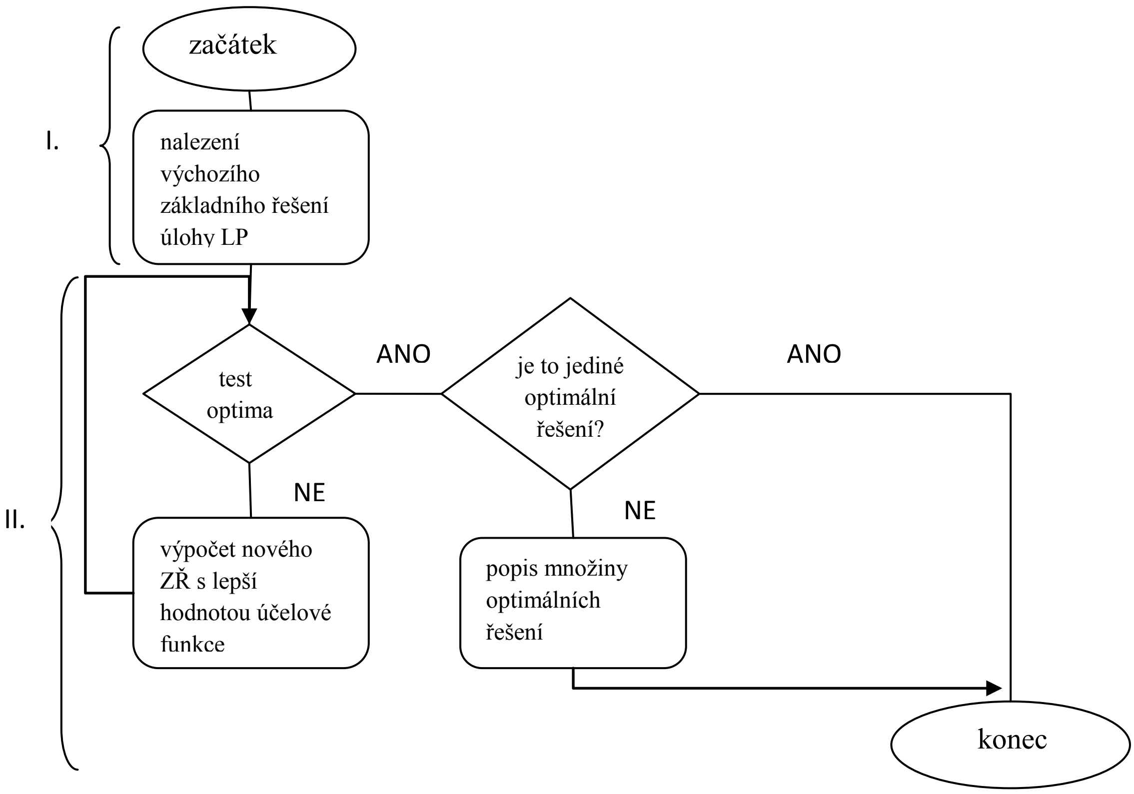
Simplexová metoda je iterační (opakovaný) výpočetní postup pro nalezení optimálního řešení úlohy lineárního programování. Základní princip simplexové metody je znázorněn na obrázku 3.3.

Postup výpočtu pomocí simplexové metody lze rozdělit na dvě základní fáze:

I. fáze – Nalezení (výpočet) výchozího základního řešení.

II. fáze – iterační postup vedoucí k optimalizaci účelové funkce.

Obrázek 3.3. Hrubé schéma simplexové metody.



Zdroj: Jablonský (2002, str. 51)

Úvodním bodem tohoto algoritmu je nalezení výchozího základního řešení úlohy LP. Pokud je již takové řešení k dispozici, potom simplexová metoda v jednotlivých krocích vypočte vždy nové základní řešení s lepší nebo alespoň stejnou – v případě maximalizace vyšší – hodnotou účelové funkce. Po konečném počtu kroků musí tedy tento výpočetní postup vést k nalezení základního řešení s nejlepší hodnotou účelové funkce nebo ke zjištění, že takovéto řešení neexistuje. Při jeho nalezení se musí jednat podle základní věty o LP o řešení optimální.

V některých speciálních případech je nalezení výchozího základního řešení natolik snadné, že I. fáze výpočtu vlastně odpadá. V takovém případě se celý postup označuje jako **jednofázová simplexová metoda**. V obecném případě nemusí být však nalezení výchozího základního řešení úlohy LP jednoduché, popřípadě takové řešení nemusí vůbec existovat. Potom mluvíme o **dvoufázové simplexové metodě**.

Jednofázovou simplexovou metodu lze využít v případě, že všechna vlastní omezení úlohy lineárního programování jsou ve tvaru “ $\leq$ “. Poté musíme tuto soustavu nerovnic převést na soustavu rovnic, pomocí tzv. *přídatných proměnných*. Dostáváme tedy soustavu rovnic ve speciálním tvaru, který usnadňuje získání základního řešení. Tento tvar soustavy rovnic označujeme jako *kanonický tvar*.

Podrobný postup vypracování úloh lineárního programování pomocí simplexové metody uvádí Jablonský (2002).

3.3 Zpracovávání úloh lineárního programování pomocí informačních technologií

K vypracování této kapitoly byla použita publikace Jablonský (2002).

Vyřešení některých úloh lineárního programování by bylo téměř nemyslitelné bez použití počítačových programů. Nabídka těchto programů je poměrně široká, zahrnující jak jednoduché levné programy, schopné vyřešit úlohy s maximálně pár desítkami proměnných a omezujících podmínek, tak i vysoce výkonné programy s možností až několika tisíc proměnných a omezujících podmínek. Tomu samozřejmě odpovídají i cenové rozdíly mezi těmito programy.

K řešení jednodušších úloh ani není nutné obvykle pořizovat specializovaný program, ale dají se vyřešit například v tabulkovém kalkulátoru *MS Excel*, který je již dnes pro každého běžného uživatele PC standardem.

Mezi další jednoduché výukové programy pro řešení jednodušších úloh patří např. systém *STORM, DS for Windows* nebo *WinQSB*.

Tyto programy neobsahují pouze moduly určené k řešení úloh lineárního programování, ale i další moduly z oblasti operačního výzkumu či statistiky.

Systém STORM je již poněkud starší a pracuje pouze v prostředí MS DOS, dále se tedy budeme zajímat výhradně o programy WinQSB a DS for Windows.

DS for Windows

Ihned po spuštění programu je uživateli zobrazeno okno s nabídkou jednotlivých modulů, z nichž si může vybrat ten, se kterým chce pracovat. Mezi těmito moduly se nachází i modul *Linear programming*, který se mimo jiné využívá i k řešení úloh v rámci teorie her.

Linear programming

V modulu Linear programming lze řešit úlohy, ve kterých je maximálně 90 proměnných a 90 omezujících podmínek. Při vytváření nového datového souboru je třeba nejprve určit základní parametry úlohy:

- titulek, tj. krátký popis či označení úlohy,
- počet omezujících podmínek, max. 90,
- počet proměnných, max. 90,
- typ účelové funkce, maximalizace nebo minimalizace,
- jména řádků.

Po zadání těchto informací se vygeneruje příslušná tabulka, do které uživatel zadá vstupní údaje. Následný výpočet lze provádět buď po jednotlivých iteracích (tlačítko *step*) nebo zadat výpočet optimálního řešení (*solve*). V případě volby po jednotlivých iteracích se zobrazují jednotlivé simplexové tabulky.

Výpočet může skončit jedním ze tří základních způsobů:

- je nalezeno optimální řešení a potom jsou výsledky umístěny do několika různých oken (úloha může mít i více optimálních řešení, pak je zobrazeno hlášení „multiple optimal solutions exist“),
- úloha nemá omezenou hodnotu účelové funkce,
- úloha nemá žádné přípustné řešení.

Výpočetní program QSB (případně WinQSB) má velmi obdobný systém zadávání i výpočtu informací.

4. Aplikace teorie her v oblasti společenských her

Jak již bylo uvedeno v kapitole 2, teorie her se využívá jak v oblasti společenských, tak i přírodních věd. Stejně tak se prostřednictvím teorie her mohou řešit konfliktní situace v oblasti společenských her. Společenské hry, ať už karetní či deskové, se v dnešní době stávají opět velmi populárním trendem. Nalézt optimální řešení prostřednictvím teorie her ovšem není nijak jednoduché, jelikož tyto hry se postupem času stávají stále komplikovanějšími, hratelné větším počtem hráčů apod.

Jednou z nejznámějších a nejrozšířenějších společenských her jsou bezpochyby šachy. I když základní pravidla této hry nejsou nijak složitá, nalézt optimální řešení je velmi složité. Pro nalezení optimálního řešení bychom totiž potřebovali znát celý strom řešení. U šachů ale už po prvním kole nastává obrovské množství možných kombinací postavení figurek. Bez použití výpočetní techniky je tedy prakticky nemožné tuto úlohu řešit. Takový problém nastává u většiny společenských her podobného typu.

V této kapitole se pokusíme ukázat aplikaci teorie her na vybrané společenské hře. Pro tyto účely byla vybrána karetní hra **6 bere.**

Nejdříve si zde charakterizujeme základní pravidla hry. Dále si tuto karetní hru zařadíme v teorii her mezi jednotlivé typy konfliktních situací, popsaných v kapitole 2.3. Poté zvolíme na základě tohoto zařazení vhodný postup pro analýzu a řešení problému.

4.1 Oficiální pravidla hry 6 bere

V této kapitole budou popsány oficiální pravidla hry. Uvedeme si cíl hry, druhy karet, které balíček obsahuje a samozřejmě kompletní průběh hry od přípravy až po ukončení. Dále si také charakterizujeme variantu, kdy je hra hrána pouze dvěma hráči, jelikož tato varianta je pro nás klíčová.

Hra tedy obsahuje 104 hracích karet s čísly 1-104. Hra je určena pro 2-10 hráčů.

Cíl hry

Na všech kartách jsou symboly krav. Každá kráva, kterou během hry vezmete, znamená jeden minusový bod. Cílem hry je nebrat karty. Pokud už karty vzít musíte, berte ty s nejméně krávami. Vyhraje tedy ten, kdo během hry nasbírá nejméně krav.

Druhy karet

Na běžných kartách je jedna kráva.

Na kartách s čísly 5, 15, 25 atd. jsou dvě krávy.

Na kartách s čísly 10, 20, 30 atd. jsou tři krávy.

Na kartách s čísly 11, 22, 33 atd. je pět krav.

Číslo 55 je výjimka a má 7 krav.

Příprava

Na začátku hry se karty zamíchají a každému hráči se jich rozdá 10. Čtyři horní karty ze zbývajícího balíčku se položí doprostřed stolu. Každá z těchto karet bude první kartou v řadě. Během hry se budou řady skládat maximálně z pěti karet. Zbývající karty se odloží, nebudou ke hře potřeba.

Průběh hry

Zahrání karty

Každý hráč vybere jednu kartu z těch, které má v ruce, a položí ji skrytě – lícem dolů na stůl před sebe. Když všichni hráči vyberou jednu svoji kartu, otočí se tyto karty lícem nahoru. Kdo má kartu s nejnižším číslem, zařazuje ji jako první do jedné ze čtyř řad (tj. pokládá ji na jednu z ležících karet). Další kartu zařazuje ten, kdo má druhé nejnižší číslo, atd., dokud nebude umístěna poslední vyložená karta. Toto se opakuje dokola, než všichni hráči zahrají svých 10 karet.

Karta musí být umístěna do jedné z řad dle následujících pravidel:

- karty v řadě se vždy skládají tak, aby karta, kterou přikládáte, měla vždy vyšší číslo, než karta, za kterou ji přikládáte,
- karta musí být umístěna do řady za kartu, která má dané vyložené kartě nejbližší nižší hodnotu.

POZOR: Pro umísťování karet do řad jsou vždy důležité poslední (nejvyšší) karty umístěné v řadách na stole.

Získávání karet

Dokud lze všechny zahrané karty zařadit do řad, nikdo nemusí žádné karty brát. Ovšem v případě, že se řada naplní nebo je vyložena karta s tak nízkou hodnotou, že už se nikam zařadit nedá, musí si hráč, který takovou kartu vyložil vzít některou řadu karet.

V takových případech platí:

- Řada je naplněná, když je v ní pět karet. Ve chvíli, kdy do této řady má podle pravidel nejnižšího rozdílu být umístěna šestá karta, hráč, který tuto kartu zahrál, si musí vzít všech pět karet této řady. Místo nich dá doprostřed stolu kartu, kterou právě zahrál. Ta bude tvořit začátek nové řady.
- Všechny karty, které hráč vezme, si umístí do balíčku před sebe na stůl, nebere si je do ruky. V ruce nebude nikdy mít jiné karty než ty, které dostal na začátku.
- Když hráč zahraje tak nízkou kartu, že ji není možné umístit do žádné z řad, musí si vzít jednu celou řadu podle svého výběru. Vezme si všechny karty z této řady do balíčku vedle sebe na stůl. Místo nich dá doprostřed stolu kartu, kterou právě zahrál a ta bude tvořit začátek nové řady.
- Kdo vyloží tak nízkou kartu, že ji už nelze zařadit a musí si tedy vzít celou řadu, měl by si vybrat tu řadu, kde je nejméně krav.

Konec hry

Hra končí, když všichni hráči zahrají svých deset karet. Každý pak spočítá krávy v balíčku karet, které nasbíral. Vyhrává ten hráč, který nasbíral nejméně krav.

Součástí pravidel této společenské hry jsou taky tipy pro různé modifikace, které hru udělají složitější, taktičtější nebo ji přizpůsobí určitým podmínkám. Tou nejpodstatnější z těchto modifikací je hra pro dva hráče.

Modifikace pro 2 hráče

V případě, že je hra hrána pouze dvěma hráči, je poněkud nepraktické rozdávat z balíku 104 karet každému z hráčů pouze 10 karet a zbytek nevyužít. V takovémto případě lze základní balíček omezit pouze na 24 karet s čísly 1-24, kdy se opět každému hráči rozdá po 10 kartách a zbylé 4 se vyloží doprostřed stolu. V takovém případě se hra stává taktičtější, jelikož oba hráči si mohou odvodit, jaké karty jejich soupeř drží v ruce.

Ostatní pravidla hry, která zde byla uvedena, zůstávají neměnná. Na závěr je třeba ještě zmínit, že hru jako celek (10 kol) lze opakovat stále dokola, přičemž si hráči zapisují počet získaných karet v jednotlivých hrách. Dle domluvy (např. po 10 opakováních, nebo dokud jeden z hráčů nedosáhne určitého množství karet) si hráči sečtou počet karet získaných během jednotlivých her. Vyhrává hráč s nejnižším počtem získaných karet.

4.2 Zařazení hry 6 bere v teorii her

Aby bylo možno zvolit správný postup pro analýzu a řešení hry, je nutné si nejdříve zařadit hru dle jednotlivých členění konfliktů. Budeme tedy postupovat na základě členění z kapitoly 2.3.

Počet účastníků

Podle počtu účastníků konflikty dělíme na konflikt dvou a více účastníků. Hra 6 bere je hrou pro 2-10 hráčů. Je tedy zařaditelná do obou skupin. Zde se ovšem variantou pro více než 2 účastníky zabývat nebudeme. Pro naši potřebu je tedy tato hra konfliktem dvou účastníků.

Povaha účastníků

Tato hra je hrou pro dvě osoby, u kterých se předpokládá maximální racionalita v jednání. Ve hře tedy figurují dva inteligentní účastníci.

Vyhraněnost vztahů v konfliktu

V případě antagonistického konfliktu je zisk jednoho hráče ztrátou druhého hráče. V naší hře hráči nebojují o žádnou určenou výhru, ale snaží se minimalizovat počet získaných krav. V každé jednotlivé zahrané hře můžou hráči získat libovolný počet krav, podle toho jak dobře strategicky budou při hře uvažovat. Danou hru tedy řadíme do kategorie neantagonistických konfliktů.

Spolupráce

Pokud je daný konflikt neantagonistický, v určitých případech je možné spolupracovat, aby si oba hráči polepšili. Naší rozebírané karetní hry se ale žádná spolupráce netýká. Smyslem této hry je vyhrát, tzn. nasbírat méně krav než soupeř. Je tedy zcela jisté, že dotyčný hráč bude sledovat čistě své zájmy, případně se ještě soupeře bude snažit co nejvíce poškodit. Konflikt je tedy nekooperativní.

Opakovaný konflikt

V případě, že hru 6 bere hrají dva hráči s 24 kartami, celá hra má tedy 10 kol. V těchto kolech vždy hráči provádí stejný úkon (vybírají karty a ty poté dokládají na hromádky). Hra by se tedy zdánlivě dala považovat za opakovanou. Ovšem podmínek, za kterých je hra opakovaná a které jsou popsány v kapitole 2.3.4, je poněkud více a naší karetní hrou nejsou splněny. V této karetní hře hráči nemají každé kolo stejný prostor strategií a zároveň výplaty závisí na tom, které kolo se hraje. Pro každé kolo jsou nastaveny jiné podmínky (jiné prostory strategií a jiné výplaty) a tyto podmínky se odvíjí od akcí zvolených v předchozích kolech.

Rozvinutý tvar

Aby byla hra v rozvinutém tvaru, museli by se hráči v jednotlivých tazích mezi sebou střídat. V tomto případě ale hráči volí své strategie pro jednotlivá kola současně.

Postupné dokládání karet se nepovažuje za střídání tahů, jelikož pořadí určují pouze hodnoty doložených karet. Jeden hráč tak může klidně dokládat jako první několikrát za sebou. Podobnost se hrami v rozvinutém tvaru může spočívat pouze v tom, že předchozí kola určují další průběh hry a volby jednoho hráče ovlivňují následující chování druhého hráče.

Shrnutí: Po shrnutí těchto informací dojdeme k závěru, že 6 bere je poměrně specifický druh poněkud složitěji zařaditelného konfliktu. S jistotou můžeme říct, že je to nekooperativní neantagonistický konflikt dvou inteligentních účastníků, resp. soubor takových konfliktů. Pokud totiž hru nemůžeme zařadit přímo jako opakovanou, můžeme alespoň říci, že je souborem deseti jednotlivých konfliktů, které se dají znázornit pomocí dvoumaticové hry. Zároveň také obsahuje některé prvky her v rozvinutém tvaru, jelikož jednotlivá kola na sebe navazují. Pravděpodobně bude tedy nutné využít i znázornění pomocí stromu hry, ovšem bez střídání tahů mezi protihráči.

4.3 Aplikace teorie her na hru 6 bere

Aby bylo možné hru analyzovat a aplikovat na ni postup hledání optimální strategie, bude nutné za tímto účelem zjednodušit původní pravidla. Veškerá pravidla se budou týkat pouze hry dvou hráčů.

Jak již bylo zmíněno na počátku 4. kapitoly, u her, jako jsou například šachy, může již po prvních dvou tazích dojít k obrovskému množství možných kombinací. V případě této karetní hry je to obdobné. Pokud má varianta pro dva hráče 24 karet, což znamená, že každý hráč má 10 karet a na stole leží 4 hromádky, celá hra bude odehrána až po deseti kolech. Již po prvním kole může každý z hráčů zvolit jednu z deseti svých karet, které drží v ruce. To je již 100 různých variant prostředí, které se mohou vytvořit pro druhé kolo. Po prvním kole již hráči drží v ruce 9 karet. Opět mohou zvolit každý jednu ze svých devíti karet atd. Takto navíc na sebe tahy navazují, tudíž se počet možných kombinací a případný strom hry rozroste do astronomických rozměrů. Řešení takového problému je již úkolem pro výpočetní techniku, nikoli pro praktickou ukázku.

Pro začátek bude tedy nejlepší hru co nejvíce zjednodušit. Toto zjednodušení provedeme několika úpravami pravidel tak, aby samozřejmě původní systém hry byl zachován. Pravidla budou tedy obsahovat následující změny:

- Za trestné body se již nebude počítat počet kravích znaků na jednotlivých získaných kartách, ale pouze samotné karty. Všechny druhy karet tedy budou mít jednotnou cenu, tedy jedna karta = jeden minusový bod.
- Další změnou bude změna počtu hracích karet ve hře, ovšem tak, aby hra stále dávala smysl. Stejně tak snížíme i počet hracích hromádek. Místo se čtyřmi budeme pracovat pouze s dvěma.
- Pokud hráč vyloží nižší kartu, kterou již nelze nikam doložit, bude prioritně vybírat hromádku s nižším počtem karet. Pokud obě hromádky budou se stejným počtem karet, vybere si tu, kde figuruje nižší karta.

Těmito pravidly se eliminuje další rozrůstání variant.

Je třeba také zmínit fakt, že ve hře figuruje náhodná složka v podobě rozdání karet na počátku hry. Každá hraná hra má tedy jiné vstupní podmínky. Při analýze hry a hledání optimální strategie tedy budeme vycházet z náhodně rozdaných karet, a ty budou vstupními podmínkami pro případ.

Pro tuto aplikační část byly vybrány dvě varianty hry. První variantou je hra s 6 kartami. Je to nejnižší počet karet, při kterém hra stále bude dávat smysl. Jako druhou variantu jsme zvolili variantu s 8 kartami. Tato varianta vznikla přidáním jednoho herního kola k variantě s 6 kartami. Větším počtem karet se již zabývat nebudeme, jelikož každé další rozšíření hry způsobuje růst stromu hry do takových rozměrů, že je prakticky nereálné hru analyzovat bez použití programování.

4.3.1 Varianta s 6 kartami

Jako první příklad jsme vybrali variantu s velmi eliminovanými pravidly. Počet karet jsme snížili na možné minimum, stejně tak byl snížen počet hracích hromádek. Hrací hromádky jsou tedy dvě a každý hráč drží v ruce dvě hrací karty. Celá hra se tedy zahraje na dvě kola. Jelikož v 2. kole již každému hráči zůstane pouze jedna karta, rozhodovací situací je pouze 1. kolo.

Pro tuto hru byly karty náhodně rozdány. Výsledek náhodného rozdání karet je zobrazen v tabulce 4.1. V této tabulce můžeme pozorovat, jaké karty bude mít na počátku hry 1. a 2. hráč. Sloupec „počátek" vyobrazuje karty, které vykládáme na stůl a které tvoří začátek řady.

Tabulka 4.1

Hráč 1	Hráč 2	Začátek
2	3	1
4	6	5

V 1. kole má každý z hráčů 2 karty, což znamená, že existují 4 různé kombinace chování hráčů.

Přehled těchto kombinací můžeme vyjádřit v následující tabulce.

Tabulka 4.2 Přehled možných průběhů hry při variantě s 6 kartami

kolo		1	5		1	5		1	5		1	5
1.	2|3	2		2|6	2		4|3	3		4|6	4	
		3				6		**4**				6
2.	4|6	4		4|3	**3**		2|6	**2**		2|3	**2**	
			6		4				6		3	
	H1	0		H1	0		H1	3		H1	2	
	H2	2		H2	2		H2	0		H2	0	

- První sloupec tabulky vyjadřuje kolo, které se právě hraje.
- První sloupec každé jednotlivé, barvou rozlišené části tabulky ukazuje zvolené karty v jednotlivých kolech v pořadí 1. hráč|2. hráč.
- V prvním řádku tabulky jsou uvedeny karty, které byly při rozdání vylosovány jako počátky hracích kupek.

Dále v tabulkách vidíme postup skládání karet na jednotlivé kupky v určeném pořadí. Tučně jsou označeny karty, které jsou třetí v pořadí, což znamená, že hráč, který takovouto kartu vyložil, již maximálně naplnil hrací kupku a musí předešlé 2 karty odebrat. Namísto těchto karet pak ponechá vyloženou kartu. Hrací karty, které hráč odebral, se nyní stávají trestnými body.

Ve druhém kole již hráči nejsou vystaveni rozhodovací situaci, protože oba drží v ruce pouze jednu kartu. Výsledek hry je tedy možné ovlivnit pouze v prvním kole.

Výplaty jednotlivých herních strategií jsou uvedeny pod jednotlivými barevnými částmi tabulky.

Z těchto informací můžeme celý příklad znázornit jako jednu dvoumaticovou hru (viz kapitola 2.3.2). I když je hra zahrána na dvě kola, v druhém kole již jednoduše není o čem rozhodovat a je pouze následkem rozhodování kola prvního. Jednotlivé matice budou tedy vypadat následovně:

Matice pro hráče 1

<table>
<tr><td>H1|H2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr>
</table>

Matice pro hráče 2

<table>
<tr><td>H1|H2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Jelikož kladné hodnoty v této matici zobrazují počet karet odebraných jednotlivými hráči, budeme se snažit ve hře minimalizovat počet těchto karet, jelikož vítězí hráč s nižším počtem karet. Oba hráči se tedy budou snažit odebrat co nejnižší množství karet. Matice můžeme spojit v jednu výslednou matici:

Výsledná matice

<table>
<tr><td>H1|H2</td><td>3</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>0|2</td><td>0|2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3|0</td><td>2|0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

Podle pravidel uvedených v kapitole 3.1.2 budeme hledat řešení dvoumaticové hry v ryzích strategiích. Označíme tedy sloupcová minima (jelikož cílem hry je minimalizovat množství získaných karet) v matici pro 1. hráče a řádková minima matice 2. hráče. Tato minima jsou uvedena pod maticí a napravo od ní. Pokud je některá dvoumatice prvků označena oběma hráči, jde o rovnovážné řešení (toto řešení je v matici vyznačeno tučně).

V matici lze pozorovat dvě taková rovnovážná řešení, a to jsou řešení 2|3 a 2|6. V obou případech 1. hráč nezíská žádnou kartu a 2. hráč získá dvě karty. Pokud by se 1. hráč odchýlil od své optimální strategie, dosáhl by jen horšího výsledku.

Shrnutí: V tomto případě 1. hráč volí vždy v 1. kole kartu s číslem 2. Bez ohledu na volbu 2. hráče je pro něj tato strategie vítězná. 2. hráč bez ohledu na to, kterou kartu zvolí (samozřejmě za předpokladu, že 1. hráč dodrží svou optimální strategii), získá dvě karty. Pokud by volil kartu s číslem 3 a 1. hráč by se nezachoval racionálně (nevolil by v 1. kole kartu s číslem 2), byl by 1. hráč poškozen více, jelikož by odebral tři karty.

4.3.2 Varianta s 8 kartami

Jako druhá byla vybrána varianta, kdy se do hry přidají další dvě karty, přičemž počet hracích kupek zůstane stejný. Kupky budou tedy dvě a každý hráč bude mít v rukou o kartu více – tedy tři karty. Tímto úkonem se zvýší počet kol dané hry o jedno. Jelikož v předešlém příkladě nebylo již v druhém kole z čeho vybírat, počet možných variant byl tedy pouze 4. V tomto případě se přidáním další karty a tedy i dalšího kola počet možných kombinací poměrně hodně zvyšuje.

Na počátku hry má každý hráč 3 karty, což znamená, že v prvním kole může být provedeno 3x3 možností, což je 9. Každému hráči zbudou do 2. kola 2 karty, což v druhém kole znamená 2x2 karty, což jsou 4. Jelikož ale tyto čtyři možnosti mohou následovat po všech jednotlivých devíti možnostech prvního kola, celkový počet možných kombinací až do třetího kola je 9x4, což je 36.

Do hry byly tedy zařazeny navíc karty 7 a 8, které byly rozdány hráčům k rozdělení z příkladu 4.3.1. Výsledné rozdání tedy znázorňuje tabulka 4.3.

Tabulka 4.3

Hráč 1	Hráč 2	Začátek
2	3	1
4	6	5
7	8	

Pro znázornění těchto variant bylo použito 9 tabulek po 4 částech, jako v předešlém příkladě. Každá z 9 tabulek znázorňuje jednu z možných kombinací 1. kola, každá barevná část jednotlivé tabulky znázorňuje možnou navazující variantu 2. kola.

Stejně jako v předešlém příkladě (resp. tabulce 4.2) jsou pod jednotlivými tabulkami uvedeny výsledky, kterých dosáhneme jednotlivými kombinacemi karet zahraných v 1. a ve 2. kole.

Tabulka 4.4 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 2|3 v 1. kole.

<table>
<tr><td>kolo</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>2|3</td><td>2</td><td></td><td>2|3</td><td>2</td><td></td><td>2|3</td><td>2</td><td></td><td>2|3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>7|6</td><td></td><td>6</td><td>7|8</td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>7|8</td><td></td><td>7</td><td>7|6</td><td>6</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 4.5 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 2|6 v 1. kole.

<table>
<tr><td>kolo</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>2|6</td><td>2</td><td></td><td>2|6</td><td>2</td><td></td><td>2|6</td><td>2</td><td></td><td>2|6</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>4|3</td><td>3</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>7|8</td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>7|8</td><td></td><td>7</td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>4|3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>0</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 4.6 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 2|8 v 1. kole.

<table>
<tr><td>kolo</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>2|8</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>4|3</td><td>3</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>7|6</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>7|6</td><td>6</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>4|3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>0</td><td></td><td>H1</td><td>4</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td><td>H2</td><td>4</td><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td><td>H2</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 4.7 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 4|3 v 1. kole.

<table>
<tr><td>kolo</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>4|3</td><td>3</td><td></td><td>4|3</td><td>3</td><td></td><td>4|3</td><td>3</td><td></td><td>4|3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>2|6</td><td></td><td>2</td><td>2|8</td><td></td><td>2</td><td>7|6</td><td></td><td>6</td><td>7|8</td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>7|8</td><td>7</td><td></td><td>7|6</td><td></td><td>6</td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>2|6</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H1</td><td>0</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 4.8 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 4|6 v 1. kole.

<table>
<tr><td>kolo</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>2|3</td><td>2</td><td></td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>7|8</td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>7|8</td><td></td><td>7</td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>2|3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H1</td><td>2</td><td></td><td>H1</td><td>2</td><td></td><td>H1</td><td>0</td><td></td><td>H1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td><td>H2</td><td>5</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 4.9 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 4|8 v 1. kole.

<table>
<tr><td>kolo</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>2|3</td><td>2</td><td></td><td>2|6</td><td>2</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>7|6</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>7|6</td><td>6</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>2|6</td><td>2</td><td></td><td>2|3</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H1</td><td>5</td><td></td><td>H1</td><td>2</td><td></td><td>H1</td><td>2</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td><td>H2</td><td>2</td><td></td><td>H2</td><td>2</td><td></td><td>H2</td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 4.10 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 7|3 v 1. kole.

<table>
<tr><td>kolo</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td><td>7|3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>2|6</td><td>2</td><td></td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>4|8</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>4|8</td><td>4</td><td></td><td>4|6</td><td>4</td><td></td><td>2|8</td><td>2</td><td></td><td>2|6</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H1</td><td>4</td><td></td><td>H1</td><td>2</td><td></td><td>H1</td><td>1</td><td></td><td>H1</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td><td>H2</td><td>3</td><td></td><td>H2</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

Tabulka 4.11 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 7|6 v 1. kole.

kolo		1	5		1	5		1	5		1	5
1.	7|6		6	7|6		6	7|6		6	7|6		6
			7			7			7			7
2.	2|3	2		2|8	2	**8**	4|3	3		4|8	4	
		3						4				**8**
3.	4|8	**4**		4|3	3		2|8	**2**		2|3	**2**	
			8		**4**				**8**		3	
	H1	3		H1	3		H1	3		H1	2	
	H2	3		H2	3		H2	3		H2	3	

Tabulka 4.12 Přehled možných průběhů hry při variantě s 8 kartami a volbě 7|8 v 1. kole.

kolo		1	5		1	5		1	5		1	5
1.	7|8		7	7|8		7	7|8		7	7|8		7
			8			8			8			8
2.	2|3	2		2|6	2		4|3	3		4|6	4	
		3			6			4			6	
3.	4|6	**4**		4|3	**3**		2|6	**2**		2|3	**2**	
		6			4			6			3	
	H1	3		H1	0		H1	3		H1	3	
	H2	0		H2	3		H2	0		H2	0	

Nyní již víme, jak budou vypadat všechny možné varianty, ke kterým během hry může dojít. Víme také jejich konečné výsledky.

Nyní se již konflikt rozdělí na dva neantagonistické konflikty, jelikož ve hře hrajeme oproti variantě 4.3.1 o jedno kolo navíc.

Abychom mohli hledat optimální řešení, budeme muset nejprve 1. kolu (resp. 1. konfliktu) přiřadit určité ohodnocení. Ve variantě 4.3.1 jsme v jednotlivých maticích uvedli výsledné hodnoty, ke kterým jednotlivé kombinace vyložených karet vedly. Tyto hodnoty použijeme v tomto případě rovněž, ovšem až při hodnocení druhého kola.

Cílem každého hráče je prioritně vyhrát, což znamená nasbírat co nejmenší množství karet. Nejlepší tedy bude zhodnotit jednotlivé tahy dle počtu výher, ke kterým pro jednotlivé hráče vedou. Pokud hráč vyhraje, dostane za výhru 1 bod. Pokud prohraje nebo nastane remíza, dostane 0 bodů. Takto se opět utvoří dvě matice, každá pro jednoho hráče, kde bude zaznamenán počet výher, které mohou získat při volbě jednotlivých kombinací v 1. kole hry.

Z předešlých tabulek jsme vytvořili následující matice.

Matice pro hráče 1

H1|H2	3	6	8
2	0	1	1
4	1	3	0
7	1	0	1

Matice pro hráče 2

H1|H2	3	6	8
2	2	0	3
4	1	1	2
7	3	1	3

V každé matici je zaznamenán počet výher dosažitelných pro jednotlivé hráče při jednotlivých kombinacích karet v prvním kole. Nyní tyto matice opět spojíme a budeme hledat maximum, jelikož snahou každého hráče je maximalizovat počet výher, kterých mohou dosáhnout po vyložení jednotlivých karet.

výsledná matice

H1|H2	3	6	8	
2	0|2	1|0	**1|3**	3
4	1|1	3|1	0|2	2
7	**1|3**	0|1	**1|3**	3
	1	3	1	

Tučně vyznačené kombinace výher v matici označují optimální strategie. Optimální strategie jsou v tomto případě tři. Těmito strategiemi jsou kombinace karet 7|3, 7|8 a 2|8.

Pokud se tedy kterýkoli hráč odchýlí od své optimální strategie, za předpokladu, že jeho protivník svou optimální strategii zachová, může vždy dosáhnout maximálně stejného výsledku, nikdy si ovšem nemůže přilepšit.

Jelikož jsme tímto eliminovali nevhodné strategie a vyhodnotili jsme 3 optimální strategie, další matice již budeme tvořit pouze pro tyto tři možné kombinace.

Varianta 7|3

Nyní jsou již jednotlivé výplaty v maticích zhodnoceny podle počtu karet, které hráči získají na konci hry. Po vyložení karet 7|3 v prvním tahu nastávají možné kombinace karet pro druhé kolo, zaznamenané v níže uvedených maticích.

Varianta 7|3 pro hráče 1

H1|H2	6	8
2	4	1
4	1	3

Varianta 7|3 pro hráče 2

H1|H2	6	8
2	0	0
4	3	0

Tyto matice opět spojíme v jednu a nalezneme minima ve sloupcích první matice a minima v řádcích druhé matice. Tentokrát se snažíme minimalizovat počet získaných karet.

Pokud by se hra opakovala stále dokola, dokud by nebyl odehrán určitý počet her, nebo by jeden z hráčů nedosáhl určitého množství karet, má velký význam snažit se v druhém kole minimalizovat počet získaných karet.

Výsledná matice

H1|H2	6	8	
2	4|0	**1|0**	0
4	1|3	3|0	0
	1	1	

V matici lze vidět výsledek hledání optimální strategie. Optimální strategií je zde kombinace karet 2|8.

Varianta 2|8

Po vyložení karet 2|8 v prvním kole mohou dále nastat tyto možnosti:

Varianta 2|8 pro hráče 1

H1|H2	3	6
4	3	0
7	4	3

Varianta 2|8 pro hráče 2

H1|H2	3	6
4	0	4
7	0	1

Tyto možnosti můžeme opět zaznamenat do jedné výsledné matice:

Výsledná matice

H1|H2	3	6	
4	**3|0**	0|4	0
7	4|0	3|1	0
	3	0	

Výsledkem neboli optimální strategií je kombinace karet 4|3.

Varianta 7|8

Poslední optimální strategií 1. kola je strategie 7|8. Po vyložení těchto karet následují opět varianty v níže uvedených maticích.

Varianta 7|8 pro hráče 1

<table>
<tr><td>H1|H2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

Varianta 7|8 pro hráče 2

<table>
<tr><td>H1|H2</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Tyto matice opět a naposledy převedeme do jedné výsledné matice

Výsledná matice

<table>
<tr><td>H1|H2</td><td>3</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>3|0</td><td>0|3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3|0</td><td>3|0</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>3</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

Výsledkem této matice jsou dvě optimální strategie. Těmito strategiemi jsou strategie 4|3 a 2|3.

Shrnutí: V této hře jsme nalezli celkem čtyři optimální strategie. Odchýlením od těchto strategií si ani jeden z hráčů nemůže přilepšit za předpokladu, že jeho protivník svou optimální strategii zachová. V následující tabulce 4.13 můžeme vidět průběh hry při zachování doporučených optimálních strategií. V posledním řádku tabulky je zaznamenán konečný výsledek – tedy konečný počet karet odebraných jednotlivými hráči (1. hráč|2. hráč).

Tabulka 4.13 Výsledné optimální strategie.

<table>
<tr><td>Strategie</td><td>1. strategie</td><td>2. strategie</td><td>3. strategie</td><td>4. strategie</td></tr>
<tr><td>1. kolo</td><td>7|3</td><td>2|8</td><td>7|8</td><td>7|8</td></tr>
<tr><td>2. kolo</td><td>4|8</td><td>4|3</td><td>2|3</td><td>4|3</td></tr>
<tr><td>3. kolo</td><td>2|6</td><td>7|6</td><td>4|6</td><td>2|6</td></tr>
<tr><td>Výsledek</td><td>1 karta|0 karet</td><td>3 karty|0 karet</td><td>3 karty|0 karet</td><td>3 karty|0karet</td></tr>
</table>

5. Závěr

V této bakalářské práci jsme se v několika kapitolách pokusili přiblížit principy teorie her a následně jsme se pokusili o aplikaci těchto principů na společenskou hru 6 bere se zjednodušenými pravidly.

Na počátku jsme si rozčlenili možné typy konfliktních situací a charakterizovali jsme si jejich znaky. Následně jsme přiblížili metody, jakými je možné tyto konfliktní situace analyzovat. Pro aplikační část práce jsme si vybrali oblast společenských her, jako konkrétní případ pak hru karetního typu „6 bere“. V aplikační části jsme si stručně charakterizovali pravidla hry, které následně byly upraveny tak, aby bylo možné s využitím znalostí získaných v průběhu bakalářského studia případ vypracovat, přičemž princip hry byl zachován.

Hru 6 bere jsme si charakterizovali jako neantagonistický nekooperativní konflikt, tudíž jsme při jeho řešení využili postupu uvedeného v kapitole 3.1.2, přičemž nebylo nutné přistoupit k řešení úlohy ve smíšených strategiích, ale postačily strategie ryzí. Takto byly vypracovány dvě varianty hry s upravenými pravidly, jedna s 6 hracími kartami a druhá s 8 hracími kartami.

V případě varianty s 6 kartami byla hrací kola dvě, ovšem pouze první kolo mělo smysl řešit jako rozhodovací situaci. Možné kombinace tahů byly pouze 4. Matice výplat byla tedy ohodnocena počtem konečně získaných trestných karet. Tento počet karet se hráči snaží minimalizovat. Tímto postupem byly nalezeny dvě optimální strategie.

V případě hry s 8 kartami byla hrací kola tři, z nichž dvě byla rozhodovacími situacemi. Oproti variantě s 6 kartami se přidáním 3. kola počet možných kombinací rozrostl až na 36 (9 kombinací v prvním kole a 4 kombinace 2. kola ke každé kombinaci 1. kola). Výplatní matice v 1. kole byla ohodnocena podle počtu výher, ke kterým jednotlivé kombinace tahů vedou pro každého z hráčů. Remíza byla ohodnocena nulou, stejně jako prohra. Po 1. kole byly vyhodnoceny tři optimální strategie (hráči se snažili maximalizovat v matici počet výher). Následující výplatní matice 2. kola již byla ohodnocena stejně jako ve variantě s 6 kartami, tedy počtem definitivně získaných trestných karet. Tento počet se tedy hráči snažili minimalizovat. Výsledkem byly 4 optimální strategie, zaznamenané v tabulce 4.13.

Pokud bychom chtěli analyzovat další variantu této hry (samozřejmě za našich specifikovaných a upravených podmínek a pravidel), např. s 10 kartami (2 hrací hromádky a 4 karty pro každého hráče), počet kombinací by se nám rozrostl na (4x4)x(3x3)x(2x2) což je 576. Tento postup je již těžko představitelný bez použití informačních technologií. Teoreticky vzato by ale řešení takového případu mohlo probíhat velmi podobně jako ve dvou případech analyzovaných v této práci. Každé jednotlivé kolo hry by bylo vyobrazeno maticí, ve které by kombinace jednotlivých tahů dvou hráčů byly ohodnoceny počtem výher, ke kterým vedou. Poslední kolo hry by bylo opět ohodnoceno počtem skutečně získaných trestných karet. Takto by bylo možné postupovat i v dalších případech např. s 12 nebo 14 kartami.

Použitá literatura

MORAVCOVÁ, Eva; BAŇAŘOVÁ, Jitka. *Operační výzkum*. 1. Ostrava : VŠB-TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2003. 287 s. ISBN 80-248-0365-8.

DLOUHÝ, M.; FIALA, P. Úvod do teorie her. 1. vyd. Praha: Oeconomica, 2007. 114 s. ISBN 978-80-245-1273-0.

JABLONSKÝ, J. Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování. 2. vyd. Praha: Professional Publishing, 2002. 323 s. ISBN 80-86419-42-8.

MAŇAS, M. Teorie her a optimální rozhodování. 1. vyd. Praha: SNTL, 1974. 255 s.

MAŇAS, M. Teorie her a její ekonomické aplikace. 1. Vyd. Praha: Vysoká škola ekonomická, 1983. 158 s. ISBN 4-938-068.

MAŇAS, M. Games and Decisions. Prague: University of economics, 1995. 32 s.

HYKŠOVÁ, M. Historické počátky teorie her. [online]. [cit. 2011-02-25]. Dostupný z www: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/game_theory/files/Hyksova2004a.pdf

Prohlašuji, že

- jsem byl(a) seznámen(a) s tím, že na mou diplomovou (bakalářskou) práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo;
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně, ke své vnitřní potřebě, diplomovou (bakalářskou) práci užít (§ 35 odst. 3);
- souhlasím s tím, že diplomová (bakalářská) práce bude v elektronické podobě archivována v Ústřední knihovně VŠB-TUO a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové (bakalářské) práce. Souhlasím s tím, že bibliografické údaje o diplomové (bakalářské) práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO;
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona;
- bylo sjednáno, že užít své dílo, diplomovou (bakalářskou) práci, nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).

V Ostravě dne ……………

………………………………

jméno a příjmení studenta

Adresa trvalého pobytu studenta:

………………………………….